Prima prova scritta M.R. 2013-14

June 28, 2014

Si consideri un riferimento inerziale, di origine O, assi ortonormali e coordinate (x, y, z). L'asse delle z è diretto lungo la verticale ascendente.

Il centro C di una lastra quadrata di lato ℓ, massa M e con distribuzione di massa omogenea, è libero di scorrere lungo l'asse z. La lastra a sua volta è libera di ruotare attorno a tale asse mantenendosi parallela al piano $z = 0$.

Sull'asse x è libero di muoversi un punto materiale P di massa m. Tra tale punto e uno dei vertici A della lastra si esercita una forza tramite una molla di costante elastica k. Infine, il punto P è richiamato da un centro C_1 di coordinate $(L, 0, 0)$ tramite una molla anch'essa di costante elastica k.

Si introducano le coordinate lagrangiane z, quota di C, x, coordinata di P, e θ, l'angolo che la retta CA forma con l'asse x (in verso antiorario a partire da detto asse).

- Scrivere la lagrangiana del sistema $\mathcal{L}(x, z, \theta, \dot{x}, \dot{z}, \dot{\theta})$, mostrando che si può rappresentare come somma di due lagrangiane $\mathcal{L}_1(z, \dot{z})$, $\mathcal{L}_2(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})$

  Si scrivano le equazioni del moto del sistema assegnato dalla lagrangiana $\mathcal{L}_1$ e se ne trovi la soluzione generale.

- Si consideri quindi la lagrangiana $\mathcal{L}_2$.

  -Si scrivano le equazioni del moto e si determini il moto corrispondente alle condizioni iniziali $(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (0, 0)$.

  -Si determinino le soluzioni di equilibrio del sistema relativo a $\mathcal{L}_2$ e se ne studino le proprietà di stabilità al variare del parametro $\lambda = \frac{L}{\ell} \in (0, \infty)$.

  - Si studino "le piccole oscillazioni" per il valore $\lambda = 2$, scrivendo le relative equazioni e determinando le frequenze proprie.

- Si determini una soluzione periodica del sistema lagrangiano corrispondente alla lagrangiana $\mathcal{L}(x, z, \theta, \dot{x}, \dot{z}, \dot{\theta})$.

Svolgimento

Coordinate del vertice: $A = (\frac{\ell}{\sqrt{2}}\cos\theta, \frac{\ell}{\sqrt{2}}\sin\theta, z)$.
Il momento d'inerzia della lastra rispetto all'asse verticale per C è $I = \frac{M}{6}\ell^2$.
L'energia cinetica del sistema è quindi

$$T = \frac{1}{2}[I\dot{\theta}^2 + m\dot{x}^2 + M\dot{z}^2]. \tag{0.1}$$

L'energia potenziale del sistema è:

$$U = \frac{k}{2}[z^2 + 2x^2 - 2Lx - 2xR\cos\theta] + Mgz \tag{0.2}$$

dove $R = \frac{\ell}{\sqrt{2}}$.
La lagrangiana del sistema è somma di due lagrangiane $\mathcal{L}_1(z, \dot{z})$ ed $\mathcal{L}_2(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \frac{M}{2}\dot{z}^2 - Mgz - \frac{k}{2}z^2 \\ \mathcal{L}_2 &= \frac{1}{2}[I\dot{\theta}^2 + m\dot{x}^2] - k[x^2 - Lx - xR\cos\theta] \end{aligned} \tag{0.3}$$

Il sistema di Lagrange relativo alla lagrangiana $\mathcal{L}_1$ è:

$$\ddot{z} = -\omega_1^2 z - g \tag{0.4}$$

con $\omega_1^2 = \frac{k}{M}$, e la sua soluzione generale è:

$$z(t) = A\cos(\omega_1 t + \phi)z - \frac{gM}{k} \tag{0.5}$$

con $A \in \mathbb{R}$, $\phi \in [0, 2\pi)$ costanti arbitrarie.
Il sistema di Lagrange per la lagrangiana $\mathcal{L}_2$ è:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k[2x - L - R\cos\theta] \\ I\ddot{\theta} &= -xkR\sin\theta \end{aligned} \tag{0.6}$$

quindi ogni soluzione che si diparte dalle condizioni iniziali $(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (0, 0)$ soddisfa soddisfa $\theta(t) \equiv 0$ e l'equazione

$$m\ddot{x} = -k[2x - L - R] \tag{0.7}$$

Quindi si ha:

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos(\omega_2 t + \psi) + \frac{L+R}{2} \\ \theta(t) &= 0 \end{aligned} \tag{0.8}$$

con $\omega_2^2 = \frac{2k}{m}$, $a \in \mathbb{R}$, $\psi \in [0, 2\pi)$ costanti arbitrarie.

I punti di equilibrio del sistema (0.6) sono assegnati dalle soluzioni di:

$$\begin{aligned} 0 &= -2x + L + R\cos\theta \\ 0 &= -xkR\sin\theta \end{aligned} \tag{0.9}$$

Ove $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ovverosia $L < R$ si hanno le soluzioni:

$$\begin{aligned} (x_1, \theta_1) &= (0, \pi - \arccos\frac{L}{R}) \\ (x_2, \theta_2) &= (0, \pi + \arccos\frac{L}{R}) \end{aligned} \tag{0.10}$$

Inoltre, qualunque valore positivo assuma λ, si hanno le soluzioni:

$$\begin{aligned} (x_3, \theta_3) &= (\frac{L+R}{2}, 0) \\ (x_4, \theta_4) &= (\frac{L-R}{2}, \pi) \end{aligned} \tag{0.11}$$

Consideriamo la matrice H:

$$H(x, \theta) = \begin{pmatrix} 2 & R\sin\theta \\ R\sin\theta & xR\cos\theta \end{pmatrix} \tag{0.12}$$

proporzionale alla matrice hessiana della energia potenziale in $\mathcal{L}_2$, e valutiamola nei suoi punti critici. Si ha:

$$H(x_{1,2}, \theta_{1,2}) = \begin{pmatrix} 2 & R\sin\theta_{1,2} \\ R\sin\theta_{1,2} & 0 \end{pmatrix} \tag{0.13}$$

e quind il suo determinante è negativo. Dunque i punti (x_1, θ_1) e(x_2, θ_2) forniscono equilibri instabili.
Si ha:

$$H(x_{3,4}, \theta_{3,4}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & R\frac{R \pm L}{2} \end{pmatrix} \tag{0.14}$$

dove l'ultimo termine è considerato col segno + se ci riferiamo a (x_3, θ_3), col segno $-$ nell'altro caso. Dunque (x_3, θ_3) fornisce sempre una soluzione stazionaria stabile, mentre (x_4, θ_4) fornisce una soluzione stazionaria stabile se $L < R$, instabile se $L > R$.

Per $\lambda = 2$ abbiamo l'equazione dei modi normali nelle variabili $(\xi, \theta) := (x - \frac{L+R}{2}, \theta)$:

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi} &= -2k\xi \\ I\ddot{\theta} &= -kR\frac{R+L}{2}\theta \end{aligned} \tag{0.15}$$

a cui corrispondono i moti oscillatori di frequenze rispettive

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \qquad \Omega_2 = \sqrt{\frac{L+R}{2I}kR}.$$

Infine soluzioni periodiche non banali del sistema corrispondente alla lagrangiana $\mathcal{L}$ sono fornite da

$$\begin{aligned} z(t) &= A\cos(\omega_1 t + \phi)z - \frac{gM}{k} \\ x(t) &= a\cos(\omega_2 t + \psi) + \frac{L+R}{2} \\ \theta(t) &\equiv 0 \end{aligned} \tag{0.16}$$

se $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{2M}{m}} \in \mathbb{Q}$.